

Математические модели в инвестиционных банках Опционы. Лекция 2

Михаил Андреев

апрель 2016

Технологический центр Дойче Банка





для call-опциона и для put-опциона:

$$C(S, K, \tau, r, q, \sigma) = N(d_+) S e^{-q\tau} - N(d_-) K e^{-r\tau}$$

$$P(S, K, \tau, r, q, \sigma) = K e^{-r\tau} N(-d_-) - S_0 e^{-q\tau} N(-d_+)$$

где:

$$\tau = T - t$$

$$d_+ = \frac{\log \frac{S}{K} + (r - q + \frac{\sigma^2}{2}\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}} = d_1$$

$$d_- = d_+ - \sigma\sqrt{\tau} = \frac{\log \frac{S}{K} + (r - q - \frac{\sigma^2}{2}\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}} = d_2$$

"The Greeks". Индикаторы риска



Если текущая цена опциона опциона V .

Название	Определение	Для модели Блэка-Шульца (Европейский call опцион)
Delta	$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$	$e^{-q\tau} N(d_+)$
Gamma	$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$	$e^{-q\tau} \frac{N'(d_+)}{S\sigma\sqrt{\tau}}$
Theta	$\Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$	$= -\frac{\partial V}{\partial \tau} = -e^{-q\tau} \frac{SN'(d_+)\sigma}{2\sqrt{\tau}}$ $+ qSe^{-q\tau} N(d_+) - rKe^{-r\tau} N(d_-)$
Vega	$\nu = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$	$SN'(d_+)\sqrt{\tau}$
Rho	$\rho = \frac{\partial V}{\partial r}$	$K\tau e^{-r\tau} N(d_-)$

Put-Call parity with $q \neq 0$



$$C - P = Se^{-q\tau} - Ke^{-r\tau}$$



Vanilla options

- Европейский
- Американский

Exotic options

- Бермудский
- Барьерный
- Азиатский
- Бинарный (Digital)

Много факторные опционы Rainbow options, Best-or-worst.

Производные от производных инструментов: Compound Option, Volatility swaps



$$\sigma(S, t) \neq \text{const}$$

Implied volatility. Ожидаемая волатильность.

► ImpliedVol1

► ImpliedVol2

Realized volatility



План

- Генерируем возможные "пути" для движения цены underlying
- Вычисляем мат ожидание для выплаты по опциону
- Дисконтируем на сегодня

Геометрическое броуновское движение

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW_t$$

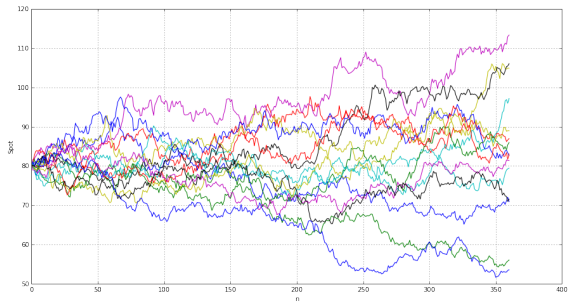
μ — drift, σ — volatility

$$S(t) = S(t + \Delta t) e^{\mu \Delta t} \exp\left(\sigma W_{\Delta t} - \frac{1}{2} \sigma^2 \Delta t\right)$$

Метод Монте-Карло



► Monte Carlo





- Yves Hilpisch – Python for Finance – <http://python-for-finance.com/>
- Ширяев А.Н. – Основы стохастической финансовой математики
- Hull, John C. – Options, Futures and Other Derivatives / Джон К. Халл – Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты